Guía de Ejercicios Nº1

1) Resuelve por el método de Cramer, los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

(a)
$$\begin{aligned} x-3y+z &= -2 \\ 2x+y-z &= 6 \\ x+2y+2z &= 2 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 2x+3y-z &= -7 \\ x-y+z &= 3 \\ -3x+8y-5z &= 2 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} x+y+z+t &= -2 \\ x-y-z+t &= -4 \\ x-y+z+t &= -6 \\ x+y-z-t &= 0 \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} 3x+y-z+3w &= 10 \\ x-2y-z-4w &= -2 \\ y+z &= 0 \\ 2x-y-3z+w &= 7 \end{aligned}$$

2) Resuelva los siguientes sistemas usando el método de la matriz ampliada

(a)
$$\begin{aligned} x-3y+2z+w &= 0 \\ x+y+4z-w &= 0 \\ 3x-y+z-2w &= 0 \\ 2x-2y-3z-w &= 0 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} a+b-2c-d &= 0 \\ 2a+2b-2d &= 0 \\ 3a-2b+d &= 0 \\ a-b-5c+2d &= 0 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} 2x+3y+z-w &= 4 \\ x-3y+3z+w &= 9 \\ x+2y-z+w &= -5 \\ 3x+3y-2z+w &= -2 \end{aligned}$$

3) Considere el sistema:

$$\begin{aligned} (1-a)x+az &= 1 \\ x+(1-a)y+az &= b \\ ax+(1-a)y &= 1 \end{aligned}$$

Determine las condiciones de $a,b \in IR$ para que el sistema tenga única solución

4) Resolver el siguiente sistema en IR^6

$$\begin{aligned} x_5+x_6 &= 1 \\ 2x_2+6x_3+2x_4 &= 4 \\ x_2+3x_3+x_4+x_5 &= 1 \\ x_2+3x_3+x_4+2x_5+x_6 &= 2 \end{aligned}$$

5) De lo anterior, ¿es $(-8,3,0,-1,-1,2)$ solución del sistema?, ¿es $(3,4,2,-1,0,1)$ solución?

6) Determinar las condiciones de los parámetros $a, b \in IR$ de modo que el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} ax + 2y + 2z &= 2 \\ 2x + y + az &= b \\ x - ay - z &= 1 \end{aligned}$$

a) El sistema tenga única solución. En tal caso determínela.
b) El sistema tenga infinitas soluciones. En tal caso determínelas.
c) Sea inconsistente.

7) Resuelva el siguiente sistema según los valores de λ tal que $\lambda \in IR,$ para obtener única solución, infinitas soluciones y solución vacía.

$$\begin{aligned} (\lambda + 3)x + y + 2z &= \lambda \\ \lambda x + (\lambda - 1)y + z &= 1 \\ 3(\lambda + 1)x + \lambda y + (\lambda + 3)z &= \lambda + 1 \end{aligned}$$

8) Encontrar el conjunto solución y determine una solución particular del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x + y + z + w &= 0 \\ x &= y + 1 \end{aligned}$$

9) Determine los valores de $c \in IR$, si es posible, de modo que el sistema

$$\begin{aligned} x + y + cz &= 0 \\ 3x + 4y + 2z &= 0 \\ 2x + 3y - z &= 0 \end{aligned}$$

a) Tenga única solución
b) Tenga solución vacía

10) Hallar $a, b, c \in IR$ para que el sistema

$$
\begin{aligned}
2x + y + z &= 1\\
-x - 3y + z &= b\\
x + cz &= 0\\
x - 2y + 2z &= a
\end{aligned}
$$

tenga única solución, infinitas soluciones, solución vacía. En los casos en que tenga solución, determínelas.

Soluciones

1)

(a) $S = \{(x,y,z) \in IR^3 / x = 2; y = 1; z = -1\}$

(b)$S = \{(x,y,z) \in IR^3 / (x,y,z) = (-\frac{46}{5}, \frac{59}{5}, 24)\}$

(c)$S = \{(x,y,z,t) \in IR^4 / (x,y,z,t) = (-3,2,-1,0)\}$

(d) $S = \{(x,y,z,w) \in IR^4 / (x,y,z,w) = (\frac{9}{5}, \frac{7}{5}, -\frac{7}{5}, \frac{3}{5})\}$

2)

(a) El sistema es inconsistente ya que queda de la forma $0x + 0y + 0z + 0w = 1$

(b) $S = \{(a,b,c,d) \in IR^4 / (a,b,c,d) = (0,0,0,0)\}$ (solución trivial)

(c) $S = \{(x,y,z) \in IR^3 / x = 3; y = -2; z = 1, w = -3\}$

3) **El sistema es inconsistente** $\forall a,b \in IR$

4) $X = (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)$

$= (0,2,0,0,-1,2) + (1,0,0,0,0,0)x_1 + (0,-3,1,0,0,0)x_3 + (0,-1,0,1,0,0)x_4$

5) $(-8,3,0,-1,-1,2)$ **es solución del sistema**

$(3,4,2,-1,0,1)$ no es solución del sistema

6)

a) El sistema tiene única solución $\forall a \in IR - \{1,-2\}$, y su solución está dada por:

$$
x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ b & 1 & a \\ 1 & -a & -1 \end{vmatrix}}{(a-1)^2(a+2)} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & b & a \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{(a-1)^2(a+2)} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & 1 & b \\ 1 & -a & 1 \end{vmatrix}}{(a-1)^2(a+2)}
$$

b) $S = \left\{(x,y,z) \in IR^3 / (x,y,z) = (\frac{-1}{3}, \frac{2}{3}, 0) + (1,0,1)t : t \in IR\right\}$

c) El sistema es inconsistente si $(a = 1 \wedge b \neq 3) \vee (a \neq -2 \wedge b \neq 0)$

7)

a) Hay única solución cuando $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1$, dada por:

$x = \frac{\lambda^2-\lambda-1}{\lambda(\lambda-1)}$ $\quad y = \frac{-\lambda^2+2\lambda+1}{\lambda(\lambda-1)}$ $\quad z = \frac{-\lambda^2+\lambda+1}{\lambda(\lambda-1)}$

b) Si $\lambda = 0$ el conjunto solución está dado por:

$$
S = \left\{ \begin{pmatrix} -t + \frac{1}{3} \\ t - 1 \\ t \end{pmatrix} \in IR^3 / t \in IR \right\}
$$

c) Si $\lambda = 1$ el sistema tiene solución vacía

8)

El conjunto solución está dado por:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad / \quad k, t \in IR \right\}$$

Si $k = t = 0$ entonces $(0, -1, 1, 0)$ es una solución particular

9)

Si $c \neq 3,$ el sistema tiene única solución $x = y = t = 0$

Como el sistema es homogéneo, entonces para todo $c \in IR$ el sistema tiene solución.

10)

Si $b - a + 1 \neq 0$ no hay soluciones.

Existe única solución si $c \neq \frac{4}{5}$ y $b = a - 1$

$x = \frac{-3c-bc}{4-5c} \quad y = \frac{-b+1+c+2bc}{4-5c} \quad z = \frac{3+b}{4-5c}$

Infinitas soluciones si $c = \frac{4}{5}, b = -3$ y $a = -2$ dadas por:

$S = \left\{ \left(\frac{-4t}{5}, \frac{5+3t}{5}, t \right) \ / \ t \in IR \right\}$